**Математическое моделирование**

**Задания на самостоятельную работу**

**Задание 1. Введение. Математические модели динамики полета**

**Методические указания**

В Лекции № 1 обсуждались общие принципы математического моделирования. Описывалась структура математических моделей. Давалась классификация математических моделей. В качестве примера рассматривалась задача о падении тела под действием собственного веса.

Предметом Задания № 1 являются математические модели динамики полета, являющиеся обобщениями математической модели процесса падения тела. Описание этих моделей приводится в Приложении к Лекции № 1. В ниже следующих заданиях требуется указать отмеченные характеристики соответствующей математической модели подобно тому, как это делалось для модели падения тела.

**Варианты**

1. Для математической модели полета зонда указать: объект исследования, систему координат, выходные параметры.
2. Для математической модели полета зонда указать: функции состояния, причинно-следственную связь, входные параметры.
3. Для математической модели полета зонда указать: причину эволюции, условия применимости модели, независимые переменные.
4. Для математической модели полета зонда указать: причину эволюции, объект исследования, условия применимости модели.
5. Для математической модели полета зонда указать: входные параметры, причинно-следственную связь, функции состояния.
6. Для математической модели полета ракеты указать: объект исследования, систему координат, выходные параметры.
7. Для математической модели полета ракеты указать: функции состояния, причинно-следственную связь, входные параметры.
8. Для математической модели полета ракеты указать: причину эволюции, условия применимости модели, независимые переменные.
9. Для математической модели полета ракеты указать: причину эволюции, объект исследования, условия применимости модели.
10. Для математической модели полета ракеты указать: входные параметры, причинно-следственную связь, функции состояния.
11. Для математической модели полета планера указать: объект исследования, систему координат, выходные параметры.
12. Для математической модели полета планера указать: функции состояния, причинно-следственную связь, входные параметры.
13. Для математической модели полета планера указать: причину эволюции, входные параметры, независимые переменные.
14. Для математической модели полета планера указать: причину эволюции, объект исследования, выходные параметры.
15. Для математической модели полета планера указать: входные параметры, причинно-следственную связь, функции состояния.

**Задание 2.** **Механические колебания. Колебания маятника и пружины**

**Методические инструкции**

В Лекции 2 была рассмотрена математическая модель процесса колебаний маятника. В частности, дается вывод уравнения для колебания маятника, приводится его решение, устанавливается закон сохранения колеблющейся энергии, исследуется положение системы, рассматриваются математические модели колебаний маятника при наличии трения, а также под действием внешней силы.

Первые шесть вариантов задания связаны с энергетическими характеристиками и положением равновесия маятника при наличии трения. При выполнении этих задач следует основываться на формулах, данных в лекции для расчета кинетической и потенциальной энергии, а также концепции равновесного положения маятника при отсутствии трения, рассмотренного в лекции.

Остальные задания связаны с математической моделью процесса колебания пружины. Вывод этой математической модели содержится в приложении к Лекции 2. При выполнении задания следует ориентироваться на аналогию между моделью колебаний маятника, подробно описанной в лекции, и моделью колебаний пружины, рассматриваемой в задании.

Во всех заданиях необходимо не только дать соответствующие результаты, но и указать их физический смысл.

**Варианты**

1. Для уравнения колебаний маятника установите закон изменения кинетической энергии. Объясните полученные результаты.
2. Установить закон изменения потенциальной энергии для уравнения колебания маятника. Объясните полученные результаты.
3. Найдите положения равновесия для математической модели общих (не малых) колебаний маятника. Объясните полученные результаты.
4. Найдите положения равновесия для математической модели колебаний маятника с трением. Объясните полученные результаты.
5. Найдите закон изменения кинетической энергии для математической модели колебаний маятника с трением. Объясните полученныерезультаты.
6. Для математической модели колебаний маятника с трением найдите закон изменения кинетической энергии. Объясните полученныерезультаты.
7. Найдите решение уравнения колебания пружины, которая в начальный момент находится в равновесии и имеет ненулевую скорость. Объясните полученные результаты.
8. Найдите решение уравнения колебания пружины, которое находится в начальное время не в равновесном состоянии и имеет нулевую скорость. Объясните полученные результаты.
9. Для уравнения колебания пружины получить закон сохранения энергии.
10. Дайте уравнение колебания пружины в присутствии трения. Установите положения равновесия для него. Объясните полученные результаты.
11. Найти решение уравнения колебаний в присутствии трения с нулевыми начальными состояниями. Объясните полученные результаты.
12. Привести решения уравнения вынужденного колебания пружины в присутствии трения. Объясните полученные результаты.
13. Привести решения уравнения вынужденного колебания пружины при отсутствии трения. Объясните полученные результаты.
14. Для математической модели колебания пружины с трением найти закон изменения кинетической энергии. Объясните полученные результаты.

**Задание 3.** **Электрические колебания. Колебательный контур**

**Методические инструкции**

В Лекции 3 были рассмотрены математические модели процессов, связанных с электрическим контуром. Главный итог здесь состоит в наличии глубокой аналогии между механическими процессами, связанными с движением маятника и пружины, и поведением электрического контура. Математически эти процессы идентичны, будучи описываемыми одинаковыми уравнениями. При выполнении ниже следующего задания надо основываться на этой аналогии.

Фактически любое задание может быть выполнено в три этапа:

1. Перевод поставленного задана с электрического языка на механический.
2. Использование уже известного соответствующего результата из предшествующей лекции.
3. Обратный перевод полученного результата с механического языка на электрический.

**Варианты**

1. Установить закон изменения электрической энергии контура с сопротивлением, если в начальный момент времени заряд и сила тока равны нулю. Объясните полученные результаты.
2. Установить закон изменения магнитной энергии контура с сопротивлением, если в начальный момент времени заряд и сила тока равны нулю. Объясните полученные результаты.
3. Определить закон изменения силы тока в контуре, с разряженным конденсатором и некоторой начальной силой тока.
4. Определить закон изменения заряда в контуре, с разряженным конденсатором и некоторой начальной силой тока.
5. Установить изменение со временем магнитной энергии контура с сопротивлением. Объясните полученные результаты.
6. Установить изменение со временем электрической энергии контура с сопротивлением. Объясните полученные результаты.
7. Установить положение равновесия для заряда в электрическом контуре с сопротивлением. Объяснить полученные результаты.
8. Установить положение равновесия для заряда в электрическом контуре. Объяснить полученные результаты.
9. Установить изменение со временем магнитной энергии контура. Объясните полученные результаты.
10. Установить изменение со временем электрической энергии контура. Объясните полученные результаты.
11. Установить положение равновесия силы тока в электрическом контуре. Объяснить полученные результаты.
12. Установить положение равновесия напряжения в электрическом контуре. Объяснить полученные результаты.
13. Установить изменение со временем силы тока для электрического контура с заданными начальными значениями заряда и силы тока. Объяснить полученные результаты.
14. Установить изменение со временем напряжения для электрического контура с заданными начальными значениями заряда и силы тока. Объяснить полученные результаты.

**Задание 4.** **Химическая кинетика**

**Методические инструкции**

В Лекции 4 были рассмотрены математические модели химических процессов, характеризующих изменение со временем исходных веществ и продуктов химических реакций. В ниже следующих заданиях требуется и записать математическую модель для указанной системы химических реакций, представляющую собой систему дифференциальных уравнений относительно всех веществ, участвующих в реакциях, с соответствующими начальными условиями. В качестве образца здесь будет математическая модель для системы реакций Лотки. Указать порядок каждой из заданных реакций. Во всех заданиях каждая из реакций характеризуется своей скоростью реакции *ki*, *i* – номер реакции из задания.

**Варианты**

1. A + 2B → 2C + D, C + 2D → A, 3A + C → 2B.
2. 2A + B → A + D, C + 2A → B, 3B + D → 2A.
3. 3A + D → 2B + C, 2B + D → 2A + 3C, A + 2C → 3B.
4. A + 3B → 3C + D, B + 2C → D, 2B + D → A.
5. 2A + C → 2B + 3D, C + 2B → 2A, 3A → 2B + C.
6. 2A + B → A + D, 2D + A → C, 3B + D → 2C.
7. A + 2D → C, 3B + A → 2A, D + 2C → 3B.
8. A + B + C → D, B + 2C → 3D, B + D → A.
9. 2A + B → D, 3C + D → A + B, A + 2C → 2B + D.
10. A + C → 2D, 2C + A → 2B, 3D + B → 2A.
11. A + 2D → 2C, 2C + B → D, D + 3C → 2B.
12. 2A + D → 2C + B, 2B + C → D, 2C + D → A.
13. A + C + 2D → 2B, 2C + B → 3A, 3D → 2B + C.
14. A + 2B → C, D + A → 2C, 3B + C → 2A.

**Задание 5.** **Динамика популяция. Модель симбиоза**

**Методические инструкции**

В Лекции 5 были рассмотрены математические модели биологических процессов, характеризующих изменение со временем численностей биологических видов при различных условиях их существования. В ниже следующих заданиях требуется для модели симбиоза подобрать конкретные числовые значения всех параметров системы, при которых реализуется указанный эффект и объяснить полученные результаты с точки зрения биологии. В ряде вариантов описанная ситуация невозможна. В этом случае следует объяснить причину невозможности ситуации.

**Варианты**

1. Подобрать значения параметров, при которых обе функции состояния монотонно возрастают, если это возможно. Дать интерпретацию полученных результатов или объяснить, почему это невозможно.
2. Подобрать значения параметров, при которых обе функции состояния монотонно убывают, если это возможно. Дать интерпретацию полученных результатов или объяснить, почему это невозможно.
3. Подобрать значения параметров, при которых первая функция состояния сначала возрастает, а потом убывает, а вторая монотонно убывает, если это возможно. Дать интерпретацию полученных результатов или объяснить, почему это невозможно.
4. Подобрать значения параметров, при которых первая функция состояния сначала убывает, а потом возрастает, а вторая монотонно убывает, если это возможно. Дать интерпретацию полученных результатов или объяснить, почему это невозможно.
5. Подобрать значения параметров, при которых вторая функция состояния сначала возрастает, а потом убывает, а первая монотонно убывает, если это возможно. Дать интерпретацию полученных результатов или объяснить, почему это невозможно.
6. Подобрать значения параметров, при которых вторая функция состояния сначала убывает, а потом возрастает, а первая монотонно убывает, если это возможно. Дать интерпретацию полученных результатов или объяснить, почему это невозможно.
7. Подобрать значения параметров, при которых первая функция состояния монотонно убывает, а вторая монотонно возрастает, если это возможно. Дать интерпретацию полученных результатов или объяснить, почему это невозможно.
8. Подобрать значения параметров, при которых первая функция состояния сначала возрастает, а потом убывает, а вторая монотонно возрастает, если это возможно. Дать интерпретацию полученных результатов или объяснить, почему это невозможно.
9. Подобрать значения параметров, при которых обе функция состояния монотонно стремятся к положению равновесия, если это возможно. Дать интерпретацию полученных результатов или объяснить, почему это невозможно.
10. Подобрать значения параметров, при которых первая функция состояния сначала убывает, а потом возрастает, а вторая монотонно возрастает, если это возможно. Дать интерпретацию полученных результатов или объяснить, почему это невозможно.
11. Подобрать значения параметров, при которых вторая функция состояния сначала убывает, а потом возрастает, а первая монотонно возрастает, если это возможно. Дать интерпретацию полученных результатов или объяснить, почему это невозможно.
12. Подобрать значения параметров, при которых вторая функция состояния сначала убывает, а потом возрастает, а первая сначала возрастает, а потом убывает, если это возможно. Дать интерпретацию полученных результатов или объяснить, почему это невозможно.
13. Подобрать значения параметров, при которых вторая функция состояния сначала убывает, а потом возрастает, а первая монотонно возрастает, если это возможно. Дать интерпретацию полученных результатов или объяснить, почему это невозможно.
14. Подобрать значения параметров, при которых состояние системы вообще не меняется, если это возможно. Дать интерпретацию полученных результатов или объяснить, почему это невозможно.

**Задание 6.** **Математические модели экономики. Модель конкуренции**

**Методические инструкции**

В Лекции 6 были рассмотрены математические модели экономических процессов. Целью настоящего задания является исследование **модели конкуренции**, имеющей также и биологический смысл. Варианты 1-11 предполагают описание эволюции системы для одного из ее возможных вариантов, представленных на **рисунке 8.1** соответствующей лекции или на **слайде 26** презентации, где изображены фазовые кривые в модели конкуренции. В заданиях указаны варианты сочетания коэффициентов уравнения (a,b,c) и номер фазовой кривой, соответствующей данному варианту и определяемой начальными состояниями системы (1,2,3,4). Требуется объяснить смысл именного этого сочетания параметров и дать описание развития событий от начального состояния системы до завершения процесса. В вариантах 12-14 требуется указать все положения равновесия, соответствующего данному сочетанию параметров и объяснить их практический смысл. Все описания проводить как при **экономической**, так и при **биологической интерпретации** явления конкуренции.

**Варианты**

1. Вариант *а*, кривая 1.
2. Вариант *а*, кривая 2.
3. Вариант *а*, кривая 3.
4. Вариант *а*, кривая 4.
5. Вариант *b*, кривая 1.
6. Вариант *b*, кривая 2.
7. Вариант *b*, кривая 3.
8. Вариант *b*, кривая 4.
9. Вариант *с*, кривые 1.
10. Вариант *c*, кривые 2.
11. Вариант *c*, кривая (прямая) 3.
12. Вариант *а*, положения равновесия.
13. Вариант *b*, положения равновесия.
14. Вариант *c*, положения равновесия.

**Задание 7.** **Математические модели в общественных науках.   
Модель ниши**

**Методические инструкции**

В Лекции 7 были рассмотрены математические модели в общественных науках. Целью настоящего задания является исследование **модели ниши**, имеющей также биологический и экономический смысл. В задании требуется подобрать конкретные параметры системы (коэффициенты уравнения и начальные состояния) в переменных *u*,*v* так, чтобы наблюдался описанный в задании эффект. Описать соответствующую эволюцию системы в той интерпретации, которая указана в задании.

**Варианты**

1. Обе функции состояния монотонно возрастают и выходят на ненулевое положение равновесия (политика)
2. Первая функция состояния убывает до нуля, а вторая сначала убывает, а потом возрастает (экономика)
3. Вторая функция состояния убывает до нуля, а первая сначала убывает, а потом возрастает (биология)
4. Обе функции состояния монотонно убывают и выходят на ненулевое положение равновесия (экономика)
5. Первая функция состояния монотонно возрастает, а вторая сначала возрастает, а потом убывает до нуля (политика)
6. Вторая функция состояния монотонно возрастает, а первая сначала возрастает, а потом убывает до нуля (биология)
7. Первая функция состояния монотонно возрастает, а вторая монотонно убывает до нуля (экономика)
8. Первая функция состояния монотонно убывает до нуля, а вторая монотонно возрастает (политика)
9. Первая функция состояния монотонно возрастает, а вторая монотонно убывает до ненулевого положения равновесия (биология)
10. Первая функция состояния монотонно убывает до ненулевого положения равновесия, а вторая монотонно возрастает (экономика)
11. Обе функции состояния монотонно возрастают и выходят на ненулевое положение равновесия (биология)
12. Первая функция состояния сначала убывает, а потом возрастает, а вторая убывает до нуля (политология)
13. Первая функция состояния убывает до нуля, а вторая сначала убывает, а потом возрастает (экономика)
14. Первая функция состояния монотонно возрастает, а вторая монотонно убывает до нуля (биология)

**Задание 8.** **Математические модели теплопереноса   
Методические инструкции**

В Лекции 8 были рассмотрены математические модели процессов переноса, представляющие собой первую и вторую краевые задачи для однородного и неоднородного уравнения теплопроводности. В ниже следующих заданиях описаны конкретные условия протекания процесса теплопереноса в тонком однородном теле заданной длины.

Требуется выполнить следующие действия:

1. Записать математическую модель процесса.
2. Пользуясь готовыми формулами решений из текста лекции или презентации, привести решение поставленной краевой задачи.
3. Убедиться в том, что это действительно является решение задачи, подставив его в уравнение и краевые условия.
4. Указать, каким образом и почему происходит изменение температуры тела со временем в различных его точках, взяв за образец соответствующие описания из лекции.

**Варианты**

1. Тело единичной длины в отсутствии внешних источников тепла. Коэффициент температуропроводности равен 1. На концах тело теплоизолировано. В начальный момент времени температура распределена по закону cosπx.
2. Тело единичной длины в отсутствии внешних источников тепла. Коэффициент температуропроводности равен 4. На концах тела поддерживается нулевая температура. В начальный момент времени температура распределена по закону sinπx.
3. Тело единичной длины при наличии внешнего источника тепла, распределенного по закону cosπx. Коэффициент температуропроводности равен 1. На концах тело теплоизолировано. В начальный момент времени температура всюду равна нулю.
4. Тело единичной длины при наличии внешнего источника тепла, распределенного по закону sinπx. Коэффициент температуропроводности равен 4. На концах тела поддерживается нулевая температура. В начальный момент времени температура всюду равна нулю.
5. Тело длины π в отсутствии внешних источников тепла. Коэффициент температуропроводности равен 4. На концах тело теплоизолировано. В начальный момент времени температура распределена по закону cosx.
6. Тело длины 2π в отсутствии внешних источников тепла. Коэффициент температуропроводности равен 1. На концах тела поддерживается нулевая температура. В начальный момент времени температура распределена по закону sin(x/2).
7. Тело длины 2π при наличии внешнего источника тепла, распределенного по закону cos(x/2). Коэффициент температуропроводности равен 1. На концах тело теплоизолировано. В начальный момент времени температура всюду равна нулю.
8. Тело длины 2π в отсутствии внешних источников тепла. Коэффициент температуропроводности равен 2. На концах тело теплоизолировано. В начальный момент времени температура распределена по закону cos(x/2).
9. Тело длины 2π в отсутствии внешних источников тепла. Коэффициент температуропроводности равен 2. На концах тела поддерживается нулевая температура. В начальный момент времени температура распределена по закону sin(x/2).
10. Тело длины π/2 в отсутствии внешних источников тепла. Коэффициент температуропроводности равен 1. На концах тело теплоизолировано. В начальный момент времени температура распределена по закону cos2x.
11. Тело длины π/2 в отсутствии внешних источников тепла. Коэффициент температуропроводности равен 1. На концах тела поддерживается нулевая температура. В начальный момент времени температура распределена по закону sin2x.
12. Тело длины π/2 при наличии внешнего источника тепла, распределенного по закону cos2x. Коэффициент температуропроводности равен 1. На концах тело теплоизолировано. В начальный момент времени температура всюду равна нулю.
13. Тело длины π/2 при наличии внешнего источника тепла, распределенного по закону sin2x. Коэффициент температуропроводности равен 1. На концах тела поддерживается нулевая температура. В начальный момент времени температура всюду равна нулю.
14. Тело единичной длины в отсутствии внешних источников тепла. Коэффициент температуропроводности равен 3. На концах тела поддерживается нулевая температура. В начальный момент времени температура распределена по закону 2sinπx.

**Задание 9.** **Процессы переноса   
Методические инструкции**

В Лекции 9 были рассмотрены математические модели различных процессов переноса.

В ниже следующих заданиях описаны конкретные условия протекания сложных процесса переноса, когда с одной стороны, происходит некоторый химический, биологический или экономический процесс, описанный в первой части курса, а, с другой стороны, события происходит в некоторой одномерной области, вследствие чего реализуется соответствующий процесс переноса. Требуется дать полную математическую модель процесса, включающую в себя систему уравнений состояния с соответствующими начальными и граничными условиями. В качестве образца можно использовать рассмотренные в лекции модели химической реакции в некоторой области и миграции конкурирующих биологических видов.

**Варианты**

1. Дана химическая реакция А+2В→С. Начальные концентрации всех веществ известны. На левом конце области концентрации известны. Правый конец изолирован.
2. Рассматривается популяция хищников и жертв, мигрирующая по некоторой территории. Начальная численность видов известна. Область изолирована с обоих концов.
3. Рассматриваются две конкурирующие фирмы, распространяющие один и тот же товар по некоторой территории. Начальный объем выпускаемой продукции обеими фирмами известен. Область изолирована с обоих концов.
4. Дана химическая реакция А→В+С. Начальные концентрации всех веществ известны. На правом конце области все концентрации известны. Левый конец изолирован.
5. Рассматривается популяция двух видов в условиях симбиоза, мигрирующая по некоторой территории. Начальная численность видов известна. Численность обоих видов на границе известна.
6. Рассматриваются две сотрудничающие фирмы, распространяющие товар по некоторой территории. Начальный объем выпускаемой продукции обеими фирмами известен. Область изолирована с обоих концов.
7. Дана химическая реакция 2А+В→С. Начальные концентрации всех веществ известны. Область изолирована с обоих концов.
8. Рассматривается популяция конкурирующих, мигрирующая по некоторой территории. Начальная численность видов известна. Первый вид имеет заданную численность на левом конце области и не может выйти за пределы правой границы, а второй - наоборот.
9. Рассматриваются две конкурирующие фирмы, распространяющие один и тот же товар по некоторой территории. Объем выпускаемой продукции обеими фирмами в начальный момент времени и на границе рассматриваемой области известны.
10. Даны химические реакции А→2В, В→С. Начальные концентрации всех веществ известны. Область изолирована с обоих концов.
11. Рассматривается популяция хищников и жертв, мигрирующая по некоторой территории. Численность обоих видов в начальный момент времени и на границе области известны.
12. Рассматриваются две сотрудничающие фирмы, распространяющие товар по некоторой территории. Начальные и граничные значения объема выпускаемой продукции обеих фирм известны.
13. Дана химическая реакция А+В→С. Начальные концентрации всех веществ известны. На левом конце известен поток вещества А, а также концентрации веществ В и С. Правый конец изолирован.
14. Рассматривается популяция хищников и жертв, мигрирующая по некоторой территории. Начальная численность видов известна. Хищник имеет заданную численность

**Задание 10.** **Колебания струны**

**Методические инструкции**

В Лекции 10 были рассмотрены математические модели колебания струны, представляющие собой первую (закрепление концов струны) и вторую (свободные концы струны) краевые задачи для соответствующего однородного уравнения.

Требуется выполнить следующие действия:

1. Записать математическую модель процесса.
2. Пользуясь готовыми формулами решений из текста лекции или презентации, привести решение поставленной краевой задачи.
3. Убедиться в том, что это действительно является решение задачи, подставив его в уравнение и краевые условия.
4. Указать, каким образом и почему происходит изменение положения и скорости струны со временем в различных его точках, взяв за образец соответствующие описания из лекции.

**Варианты**

1. Струна единичной длины. Коэффициент a = 4. На концах струна закреплена. В начальный момент времени форма струны sinπx. Начальная скорость равна нулю.
2. Струна единичной длины. Коэффициент a = 1. Концы струны - свободные. В начальный момент времени форма струны cosπx. Начальная скорость равна нулю.
3. Струна длины π. Коэффициент a = 1. На концах струна закреплена. В начальный момент времени струна находится в равновесии. Начальная скорость распределена по закону sinx.
4. Струна единичной длины. Коэффициент a = 2. Концы струны - свободные. В начальный момент времени струна находится в равновесии. Начальная скорость распределена по закону cosπx.
5. Струна длины π. Коэффициент a = 3. На концах струна закреплена. В начальный момент времени форма струны: -sinx. Начальная скорость равна нулю.
6. Струна единичной длины. Коэффициент a = 2. Концы струны - свободные. В начальный момент времени форма струны: -cosπx. Начальная скорость равна нулю.
7. Струна длины 1. Коэффициент a = 4. На концах струна закреплена. В начальный момент времени струна находится в равновесии. Начальная скорость распределена по закону:   
   -sinπx.
8. Струна длины 1. Коэффициент a = 2. На концах струна закреплена. В начальный момент времени струна находится в равновесии. Начальная скорость распределена по закону:   
   -sinπx.
9. Струна длины π. Коэффициент a = 3. Концы струны - свободные. В начальный момент времени форма струны cos2x. Начальная скорость равна нулю.
10. Струна длины π. Коэффициент a = 2. На концах струна закреплена. В начальный момент времени форма струны sin2x. Начальная скорость равна нулю.
11. Струна длины 1. Коэффициент a = 2. Концы струны - свободные. В начальный момент времени струна находится в равновесии. Начальная скорость распределена по закону:   
    -cos2πx
12. Струна длины 1. Коэффициент a = 3. На концах струна закреплена. В начальный момент времени струна находится в равновесии. Начальная скорость распределена по закону: sin2πx
13. Струна длины π. Коэффициент a = 2. Концы струны - свободные. Начальная скорость равна нулю. В начальный момент времени форма струны: -cos2x.
14. Струна единичной длины. Коэффициент a = 1. Концы струны - свободные. В начальный момент времени форма струны 2cos2πx. Начальная скорость равна нулю.

**Задание 11.** **Теория поля   
Методические инструкции**

В Лекции 11 были рассмотрены математические модели электростатического и гравитационного полей. При этом потенциалы этих полей описываются уравнением Пуассона. Известно, что электростатическое поле в отсутствии зарядов и гравитационное поле в вакууме описываются уравнением Лапласа. В случае точечного источника гравитационного или электростатического поля в силу сферической симметрии уравнение Лапласа сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Его решение в произвольной точке определяется расстоянием от этой точки до источника поля. Для однородного провода в силу цилиндрической симметрии уравнение Лапласа также сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Его решение в произвольной точке определяется расстоянием от этой точки до провода.

В ниже следующих заданиях рассматривается электростатическое либо гравитационное поле в трехмерном пространстве в случае сферической или цилиндрической симметрии. Указывается точка, где находится точечный источник, либо прямая, соответствующая направлению проводу. Известен заряд (для провода – плотность заряда) источника гравитационного поля или масса источника гравитационного поля.

Требуется выполнить следующие действия:

1. Записать уравнение относительно потенциала поля с указанным типом симметрии.
2. Пользуясь готовыми формулами решений из текста лекции или презентации, привести решение поставленной краевой задачи.
3. Сделать замену переменных, поместив точечный источник в начало координат или направив провод по оси *z*.
4. Найти значение потенциала соответствующего поля в точке, указанной в задании.
5. Прокомментировать полученные результаты.

**Варианты**

1. Рассматривается электростатическое поле заряда *e*=2, находящегося в точке с координатами (1,1,1). Найти значение потенциала поля в точке (1,2,3).
2. Рассматривается гравитационное поле массы *m*=2, находящейся в точке с координатами (2,1,2). Найти значение потенциала поля в точке (1,0,3).
3. Рассматривается электростатическое поле провода c плотностью заряда *e*=3, проходящего через точку (2,0,0) параллельно оси *z*. Найти значение потенциала поля в точке (0,2,0).
4. Рассматривается электростатическое поле заряда *e*=1, находящегося в точке с координатами (1,0,1). Найти значение потенциала поля в точке (1,2,2).
5. Рассматривается гравитационное поле массы *m*=3, находящейся в точке с координатами (1,2,2). Найти значение потенциала поля в точке (1,0,3).
6. Рассматривается электростатическое поле провода c плотностью заряда *e*=2, проходящего через точку (0,1,0) параллельно оси *z*. Найти значение потенциала поля в точке (1,2,0).
7. Рассматривается электростатическое поле заряда *e*=3, находящегося в точке с координатами (1,1,0). Найти значение потенциала поля в точке (1,2,2).
8. Рассматривается гравитационное поле массы *m*=3, находящейся в точке с координатами (2,1,1). Найти значение потенциала поля в точке (1,1,3).
9. Рассматривается электростатическое поле провода c плотностью заряда *e*=2, проходящего через точку (1,1,0) параллельно оси *z*. Найти значение потенциала поля в точке (1,2,1).
10. Рассматривается электростатическое поле заряда *e*=1, находящегося в точке с координатами (0,1,1). Найти значение потенциала поля в точке (1,2,1).
11. Рассматривается гравитационное поле массы *m*=3, находящейся в точке с координатами (2,1,0). Найти значение потенциала поля в точке (1,0,2).
12. Рассматривается электростатическое поле провода c плотностью заряда *e*=1, проходящего через точку (1,2,0) параллельно оси *z*. Найти значение потенциала поля в точке (0,1,1).
13. Рассматривается электростатическое поле заряда *e*=4, находящегося в точке с координатами (0,0,1). Найти значение потенциала поля в точке (1,1,1).
14. Рассматривается гравитационное поле массы *m*=2, находящейся в точке с координатами (1,0,1). Найти значение потенциала поля в точке (1,0,-1).

**Задание 12.** **Вариационные принципы   
Методические инструкции**

В Лекции 12 были рассмотрены различные вопросы, связанные с применением вариационных принципов. Используя материал лекции и презентации, требуется выполнить следующие задания.

**Варианты**

1. Записать первый интеграл в задаче о кривой минимальной длины.
2. Рассматривается пружина, на которую действует сила упругости по закону *F=-kx*, где *k –* коэффициент упругости, а *x –* отклонение от положения равновесия. С помощью принципа наименьшего действия и уравнения Эйлера получить уравнение движения.
3. Для движения тела на плоскости под действием постоянной силы получить закон сохранения энергии с помощью первого интеграла системы.
4. Рассматривается движение тела переменной массы на плоскости под действием некоторой силы. С помощью принципа наименьшего действия и уравнения Эйлера получить уравнения движения.
5. Записать первый интеграл в задаче о брахистохроне.
6. Луч света движется на плоскости из точки с координатами (-4,4) под углом в 600 к оси *х*. Известно, что скорость света в нижней полуплоскости вдвое больше, чем в верхней. С помощью принципа Ферма установить, чему будет равна вертикальная координата точки, куда попадет свет с горизонтальной координатой *х=*4.
7. С помощью принципа Ферма установить траекторию движения света на плоскости в однородной среде от одной произвольной точки к другой.
8. Луч света движется на плоскости из точки с координатами (-5,5) под углом в 300 к оси *х*. Известно, что скорость света в нижней полуплоскости вдвое меньше, чем в верхней. С помощью принципа Ферма установить, чему будет равна вертикальная координата точки, куда попадет свет с горизонтальной координатой *х=*5.
9. Рассматривается прямолинейное движение тела переменной массы под действием известной переменной силы. С помощью принципа наименьшего действия получить уравнение движение. В случае постоянства силы и массы получить закон сохранения энергии с помощью первого интеграла системы.
10. Записать уравнение Эйлера для задачи о брахистохроне.
11. Рассматривается движение тела постоянной массы на плоскости под действием постоянной силы. С помощью первого интеграла системы получить закон сохранения энергии.
12. Рассматривается пружина, на которую действует сила упругости по закону *F=-kx*, где *k –* коэффициент упругости, а *x –* отклонение от положения равновесия. С помощью первого интеграла системы получить закон сохранения энергии.
13. Луч света движется на плоскости из точки с координатами (-3,4) под углом в 450 к оси *х*. Известно, что скорость света в нижней полуплоскости три раза больше, чем в верхней. С помощью принципа Ферма установить, чему будет равна вертикальная координата точки, куда попадет свет с горизонтальной координатой *х=*4.
14. Луч света движется на плоскости из точки с координатами (-3,3) под углом в 300 к оси *х*. Известно, что скорость света в нижней полуплоскости вдвое больше, чем в верхней. С помощью принципа Ферма установить, чему будет равна вертикальная координата точки, куда попадет свет с горизонтальной координатой *х=*5.

**Задание 13.** **Дискретные системы. Теория игр   
Методические инструкции**

В Лекции 13 были рассмотрены основы теории игр, в частности, дилемма заключенного, состоящая в выборе двумя игроками одного из двух вариантов. В ниже следующих заданиях рассматриваются игровые ситуации, когда имеются либо два игрока с тремя вариантами выбора, либо три игрока с двумя вариантами выбора. Используя в качестве образца результаты из лекции, нужно найти равновесие Нэша и ситуацию, оптимальную по Парето.

**Варианты**

1. Имеются три фирмы, выпускающие один и тот же товар. Каждая из фирм может назначить два варианта цен – низкие или высокие, которые соответствуют значениям 1 и 2. Спрос на товар тем больше, чем меньше уровень цен. В частности, если все фирмы назначают низкие цены, то каждая из них продаст по 12 единиц товара. Если две фирмы назначают низкие цены, а третья – высокие, то первые две фирмы продают по 14 единиц товара, а третья фирма ничего не продает. Если одна фирма назначает низкие цены, а две остальные – высокие, то первая продаст 15 единиц продукции, а две остальные – по 3. Наконец, если все фирмы назначают высокие цены, то каждая из них продает по 7 единиц продукции. Найти исходы, соответствующие равновесию Нэша и оптимальности по Парето.
2. Имеются две фирмы, выпускающие один и тот же товар. Каждая из фирм независимо друг от друга может назначить низкие, средние и высокие цены, которые соответствуют значениям 1, 2 и 3 стоимости единицы продукции. Спрос на товар тем выше, чем ниже уровень цен. В частности, если обе фирмы назначают низкие цены, то каждая из них продаст по 12 единиц продукции, если средних, то по 8, а если высокие – то по 6. Если одна фирма назначает низкие цены, а другая – средние, то первая продаст 17 единиц продукции, а вторая – 5. Если одна фирма назначает средние цены, а другая – высокие, то первая продаст 9 единиц продукции, а вторая – четыре. Если же одна фирма назначает низкие цены, а другая – высокие, то первая продает 20 единиц продукции, а вторая – ничего. Найти равновесие Нэша и ситуацию, оптимальную по Парето.
3. Рассматривается обобщение дилеммы заключенного на случай, когда каждый из двух заключенных может независимо друг от друга выбрать один из трех вариантов действий: отказаться от сделки со следствием, пойти на сделку частично или полностью. Следует указать сроки заключения, которые назначает им полиция в зависимости от выбора обоих заключенных так, чтобы равновесия Нэша и оптимальность по Парето не совпадали.
4. Имеются две фирмы, выпускающие один и тот же товар. Каждая из фирм независимо друг от друга может назначить низкие, средние и высокие цены, которые соответствуют значениям 1, 2 и 3 стоимости единицы продукции. Спрос на товар тем выше, чем ниже уровень цен. В частности, если обе фирмы назначают низкие цены, то каждая из них продаст по 13 единиц продукции, если средних, то по 9, а если высокие – то по 5. Если одна фирма назначает низкие цены, а другая – средние, то первая продаст 18 единиц продукции, а вторая – 4. Если одна фирма назначает средние цены, а другая – высокие, то первая продаст 10 единиц продукции, а вторая – 3. Если же одна фирма назначает низкие цены, а другая – высокие, то первая продает 22 единиц продукции, а вторая – ничего. Найти равновесие Нэша и ситуацию, оптимальную по Парето.
5. Имеются три фирмы, выпускающие один и тот же товар. Каждая из фирм может назначить два варианта цен – низкие или высокие, которые соответствуют значениям 1 и 2. Спрос на товар тем больше, чем меньше уровень цен. В частности, если все фирмы назначают низкие цены, то каждая из них продаст по 20 единиц товара. Если две фирмы назначают низкие цены, а третья – высокие, то первые две фирмы продают по 26 единиц товара, а третья фирма ничего не продает. Если одна фирма назначает низкие цены, а две остальные – высокие, то первая продаст 32 единиц продукции, а две остальные – по 4. Наконец, если все фирмы назначают высокие цены, то каждая из них продает по 12 единиц продукции. Найти исходы, соответствующие равновесию Нэша и оптимальности по Парето.
6. Имеются две фирмы, выпускающие один и тот же товар. Каждая из фирм независимо друг от друга может назначить низкие, средние и высокие цены, которые соответствуют значениям 1, 2 и 3 стоимости единицы продукции. Спрос на товар тем выше, чем ниже уровень цен. В частности, если обе фирмы назначают низкие цены, то каждая из них продаст по 13 единиц продукции, если средних, то по 8, а если высокие – то по 5. Если одна фирма назначает низкие цены, а другая – средние, то первая продаст 18 единиц продукции, а вторая – 4. Если одна фирма назначает средние цены, а другая – высокие, то первая продаст 8 единиц продукции, а вторая – четыре. Если же одна фирма назначает низкие цены, а другая – высокие, то первая продает 20 единиц продукции, а вторая – ничего. Найти равновесие Нэша и ситуацию, оптимальную по Парето.
7. Имеются три фирмы, выпускающие один и тот же товар. Каждая из фирм может назначить два варианта цен – низкие или высокие, которые соответствуют значениям 1 и 3. Спрос на товар тем больше, чем меньше уровень цен. В частности, если все фирмы назначают низкие цены, то каждая из них продаст по 12 единиц товара. Если две фирмы назначают низкие цены, а третья – высокие, то первые две фирмы продают по 14 единиц товара, а третья фирма ничего не продает. Если одна фирма назначает низкие цены, а две остальные – высокие, то первая продаст 17 единиц продукции, а две остальные – по 1. Наконец, если все фирмы назначают высокие цены, то каждая из них продает по 5 единиц продукции. Найти исходы, соответствующие равновесию Нэша и оптимальности по Парето.
8. Имеются две фирмы, выпускающие один и тот же товар. Каждая из фирм независимо друг от друга может назначить низкие, средние и высокие цены, которые соответствуют значениям 1, 2 и 3 стоимости единицы продукции. Спрос на товар тем выше, чем ниже уровень цен. В частности, если обе фирмы назначают низкие цены, то каждая из них продаст по 11 единиц продукции, если средних, то по 7, а если высокие – то по 5. Если одна фирма назначает низкие цены, а другая – средние, то первая продаст 16 единиц продукции, а вторая – 4. Если одна фирма назначает средние цены, а другая – высокие, то первая продаст 8 единиц продукции, а вторая – 3. Если же одна фирма назначает низкие цены, а другая – высокие, то первая продает 18 единиц продукции, а вторая – ничего. Найти равновесие Нэша и ситуацию, оптимальную по Парето.
9. Имеются три фирмы, выпускающие один и тот же товар. Каждая из фирм может назначить два варианта цен – низкие или высокие, которые соответствуют значениям 1 и 2. Спрос на товар тем больше, чем меньше уровень цен. В частности, если все фирмы назначают низкие цены, то каждая из них продаст по 20 единиц товара. Если две фирмы назначают низкие цены, а третья – высокие, то первые две фирмы продают по 26 единиц товара, а третья фирма ничего не продает. Если одна фирма назначает низкие цены, а две остальные – высокие, то первая продаст 32 единиц продукции, а две остальные – по 4. Наконец, если все фирмы назначают высокие цены, то каждая из них продает по 12 единиц продукции. Найти исходы, соответствующие равновесию Нэша и оптимальности по Парето.
10. Имеются две фирмы, выпускающие один и тот же товар. Каждая из фирм независимо друг от друга может назначить низкие, средние и высокие цены, которые соответствуют значениям 1, 2 и 4 стоимости единицы продукции. Спрос на товар тем выше, чем ниже уровень цен. В частности, если обе фирмы назначают низкие цены, то каждая из них продаст по 12 единиц продукции, если средних, то по 8, а если высокие – то по 5. Если одна фирма назначает низкие цены, а другая – средние, то первая продаст 16 единиц продукции, а вторая – 5. Если одна фирма назначает средние цены, а другая – высокие, то первая продаст 10 единиц продукции, а вторая – 3. Если же одна фирма назначает низкие цены, а другая – высокие, то первая продает 20 единиц продукции, а вторая – ничего. Найти равновесие Нэша и ситуацию, оптимальную по Парето.
11. Имеются три фирмы, выпускающие один и тот же товар. Каждая из фирм может назначить два варианта цен – низкие или высокие, которые соответствуют значениям 1 и 2. Спрос на товар тем больше, чем меньше уровень цен. В частности, если все фирмы назначают низкие цены, то каждая из них продаст по 10 единиц товара. Если две фирмы назначают низкие цены, а третья – высокие, то первые две фирмы продают по 13 единиц товара, а третья фирма ничего не продает. Если одна фирма назначает низкие цены, а две остальные – высокие, то первая продаст 16 единиц продукции, а две остальные – по 2. Наконец, если все фирмы назначают высокие цены, то каждая из них продает по 6 единиц продукции. Найти исходы, соответствующие равновесию Нэша и оптимальности по Парето.
12. Рассмотреть аналог дилеммы заключенного для случая трех человек. Подобрать сроки, назначаемые полицией заключенным в зависимости от их согласия или отказа от сделки так, чтобы равновесие Нэша и оптимальность по Парето различались.
13. Имеются две фирмы, выпускающие один и тот же товар. Каждая из фирм независимо друг от друга может назначить низкие, средние и высокие цены, которые соответствуют значениям 1, 2 и 4 стоимости единицы продукции. Спрос на товар тем выше, чем ниже уровень цен. В частности, если обе фирмы назначают низкие цены, то каждая из них продаст по 13 единиц продукции, если средних, то по 8, а если высокие – то по 5. Если одна фирма назначает низкие цены, а другая – средние, то первая продаст 17 единиц продукции, а вторая – 5. Если одна фирма назначает средние цены, а другая – высокие, то первая продаст 9 единиц продукции, а вторая – 3. Если же одна фирма назначает низкие цены, а другая – высокие, то первая продает 20 единиц продукции, а вторая – ничего. Найти равновесие Нэша и ситуацию, оптимальную по Парето.
14. Имеются три фирмы, выпускающие один и тот же товар. Каждая из фирм может назначить два варианта цен – низкие или высокие, которые соответствуют значениям 1 и 3. Спрос на товар тем больше, чем меньше уровень цен. В частности, если все фирмы назначают низкие цены, то каждая из них продаст по 12 единиц товара. Если две фирмы назначают низкие цены, а третья – высокие, то первые две фирмы продают по 15 единиц товара, а третья фирма ничего не продает. Если одна фирма назначает низкие цены, а две остальные – высокие, то первая продаст 20 единиц продукции, а две остальные – по 2. Наконец, если все фирмы назначают высокие цены, то каждая из них продает по 7 единиц продукции. Найти исходы, соответствующие равновесию Нэша и оптимальности по Парето

**Задание 14.** **Идентификация систем**

**Методические инструкции**

В Лекции 14 были рассмотрены вопросы идентификации систем и методы решения задач идентификации. Ниже для каждого варианта дается описание системы. Необходимо выполнить следующие действия.

1. Дать постановку прямой задачи с указанием входящих в нее неизвестных величин.
2. Дать полную постановку соответствующей обратной задачи.
3. Свести обратную задачу к соответствующей оптимизационной задачи, приведя минимизируемый функционал с указанием его аргументов.

**Варианты**

1. Рассматривается процесс диффузии в заданной одномерной области. Начальная концентрация вещества известна. На левом конце тела задается концентрация и диффузионный поток. Информация на правом конце отсутствует. Дополнительно известна концентрация в трех фиксированных точках на некотором интервале времени.
2. Рассматривается процесс колебания струны. Начальное положение струны известно, а начальная скорость – нет. Левый конец струны движется по заданному закону. Закон движения правого конца струны неизвестны. Дополнительно известно положение струны в некоторый фиксированный момент времени.
3. Рассматривается процесс теплопроводности в заданной одномерной области. На левом конце известен тепловой поток, а на правом – закон изменения температуры. Начальная температура тела известна. Неизвестным является коэффициент теплопроводности. Дополнительно известно закон изменения температуры в некоторой внутренней точке.
4. Рассматривается процесс вынужденных колебаний маятника при наличии трения. Начальные положение и скорость маятника известны. Неизвестен коэффициент трения. Дополнительно известно положение маятника в три фиксированных момента времени.
5. Рассматривается процесс распространения товара по заданной одномерной области. На левом конце известен поток товара, а на правом – закон изменения плотности товара. Начальная плотность товара известна. Неизвестным является коэффициент переноса товара. Дополнительно известно распределение плотности товара в конечный момент времени.
6. Рассматривается процесс диффузии в заданной одномерной области. Начальная концентрация вещества известна. На правом конце тела задается концентрация и диффузионный поток. Информация на левом конце отсутствует. Дополнительно известна концентрация в двух фиксированных точках на некотором интервале времени.
7. Рассматривается процесс переноса зарядов в заданной одномерной области. На левом конце известен поток зарядов, а на правом – закон изменения плотности заряда. Начальная плотность заряда известна. Неизвестным является коэффициент электропроводности. Дополнительно известно распределение плотности заряда в конечный момент времени.
8. Рассматривается процесс миграции биологического вида в заданной одномерной области. Левый области изолирован, а на правом задан закон изменения плотности вида. Начальное значение плотности вида известно. Неизвестным является коэффициент переноса вида. Дополнительно известно закон изменения плотности вида в некоторой внутренней точке.
9. Рассматривается процесс колебания струны. Начальное положение струны неизвестно, а начальная скорость – задана. Левый конец струны движется по заданному закону, а правый конец струны свободный. Натяжение струны неизвестно. Дополнительно известно положение струны в конечный момент времени.
10. Рассматривается процесс миграции биологического вида в заданной одномерной области. Правый конец области изолирован, а на левом задан закон изменения плотности вида. Начальное значение плотности вида неизвестно. Дополнительно известно закон изменения плотности вида в трех внутренних точках.
11. Рассматривается процесс переноса зарядов в заданной одномерной области. На правом конце известен поток зарядов, а левый конец - изолирован. Начальная плотность заряда неизвестна. Дополнительно известно изменение плотности заряда в двух фиксированных внутренних точках.
12. Рассматривается процесс переноса тепла в заданной двумерной области. На части границы области заданы как температура, так и тепловой поток, а на другой части информация отсутствует. Начальная температура тела известна. Неизвестным является также коэффициент теплопроводности. Дополнительно известно распределение температуры по всей области конечный момент времени.
13. Рассматривается процесс колебания струны. Начальное положение и скорость струны известны. Правый конец струны движется по заданному закону. Закон движения левого конца струны неизвестны. Дополнительно известно положение струны в некоторый фиксированный момент времени.
14. Рассматривается процесс вынужденных колебаний пружины при наличии трения. Начальные положение и скорость маятника известны. Неизвестен коэффициент трения. Дополнительно известно положение пружины в два фиксированных момента времени.